

## Funzione definita per casi

Data la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ (x-1)^2 + 1 & \text{per } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Risolvere i quesiti che seguono.

- Riconoscere che la funzione è continua nell'intervallo  $[0;3]$ .
- Determinare il codominio della funzione e dimostrare che la funzione è invertibile in tutto il suo dominio allorché si consideri il codominio come insieme delle immagini della stessa.  
Determinare l'espressione algebrica della funzione inversa.
- Precisare se la funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio ed in caso negativo indicare i punti angolosi del suo diagramma.
- Rappresentare il diagramma della funzione.

### Elaborazioni

- La funzione è continua in tutto il suo dominio di definizione. Infatti, in ciascuno dei due intervalli  $[0;1[$ ,  $[1;3]$  è un polinomio e nel punto di raccordo  $x=1$  i due limiti laterali esistono, sono finiti e coincidono con il valore della funzione  $f(1)=1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x-1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^2 + 1 = 1 = f(1)$$

- L'insieme delle immagini della funzione con  $0 \leq x < 1$  è l'intervallo  $[-1;1[$ ; l'insieme delle immagini descritto con  $1 \leq x \leq 3$  è l'intervallo  $[1;5]$ . Si conclude che il codominio della funzione è l'insieme  $\text{Codom}(f) = [-1;1[ \cup [1;5] = [-1;5]$ .

Considerando come insieme di arrivo per la funzione il suo codominio, dunque  $f: [0;3] \rightarrow [-1;5]$ , la funzione è invertibile in tutto il suo dominio e la funzione inversa è così definita:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y+1}{2} & \text{per } -1 \leq y < 1 \\ \sqrt{y-1} + 1 & \text{per } 1 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

- La funzione è derivabile in ciascun punto del dominio diverso da  $x=1$ , trattandosi di polinomi. Proviamo che in  $x=1$ , punto di raccordo, non sussiste la derivabilità. Proveremo ciò applicando la definizione di derivata prima, dimostrando che i limiti laterali del rapporto incrementale per  $x \rightarrow 1$  sono diversi.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2 = f'_-(1);$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2 + 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 = f'_+(1)$$

Si conclude che il punto di ascissa  $x=1$  è angoloso per il diagramma della funzione.

La funzione derivata prima è così definita

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 2(x-1) & \text{per } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

- d) Il diagramma della funzione è riportato in Figura 1

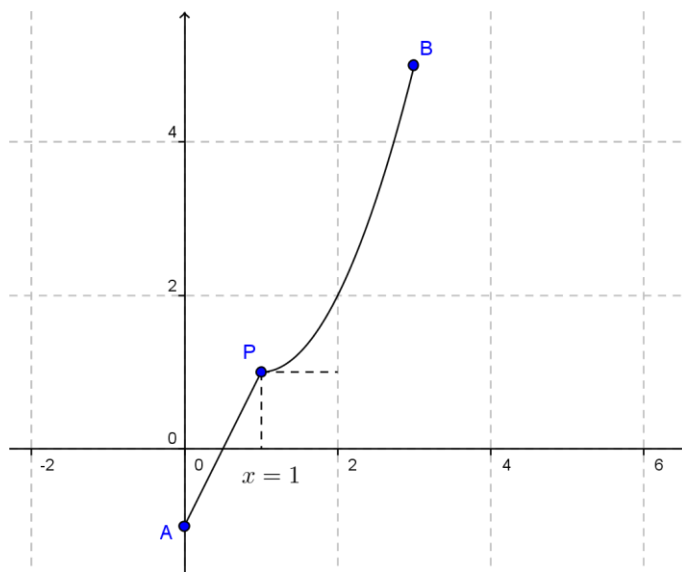


Figura 1- Il diagramma della funzione è composto dal segmento AP seguito dall'arco di una parabola. Il raccordo tra le due parti nel punto  $P(1;1)$  avviene con continuità ma non con derivabilità. Il punto P per il diagramma della funzione è angoloso.